



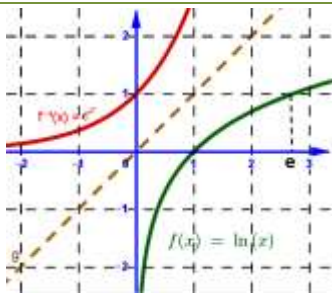
Fonctions logarithmes

La fonction logarithme népérienne $f(x) = \ln x$

$a > 0$ et $b > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$

Signe de $\ln(x)$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		- 0	+



- $D_f =]0, +\infty[$, continue et dérivable sur $D_f =]0, +\infty[$ avec $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$ avec $e \approx 2,718...$ e est un nombre irrationnel.
- $\ln ab = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$, $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln a^r = r \ln a$
- $\forall a, b \in]0, +\infty[, \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\forall a, b \in]0, +\infty[, a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$

- $f(x) = \ln(u(x))$, $x \in D_f \Leftrightarrow (x \in D_u \text{ et } u(x) > 0)$
- $f'(x) = [\ln|u(x)|]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc primitives de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sont $F(x) = \ln|u(x)| + c$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \ln(x) = 0^-$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \times \ln(x) = 0^-$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	

Logarithmes de base a

Logarithmes de base a : $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ $r \in \mathbb{Q}$



- $f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$, $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$; $\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$
- $a = 10$ donc $\log_{10}(x) = \text{Log}(x)$ (logarithme décimale)
- $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ et $\log_a(x^r) = r \times \log_a(x)$
- $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$ et $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$f(x) = a^x$

La fonction exponentielle népérienne $f(x) = e^x$

Les fonctions exponentielles de base a est : $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

$a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ $r \in \mathbb{Q}$
 $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$a^x \times a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{x \times y}$

$\frac{1}{a^x} = a^{-x}$; $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

• $0 < a < 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
 $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$

• $a > 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
 $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$

$(a^x)' = (\ln(a)) \times a^x$

Rq : $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

- La fonction réciproque de $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto e^x$ définie de $\mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$.donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
- $D_f = \mathbb{R}$, continue et dérivable sur $D_f = \mathbb{R}$ avec $(e^x)' = e^x$
- $f(x) = e^{u(x)}$, $x \in D_f \Leftrightarrow x \in D_u$
- $f'(x) = [e^{u(x)}]' = u'(x)e^{u(x)}$ donc primitives de $u'(x)e^{u(x)}$ sont $F(x) = e^{u(x)} + c$

$e^x = y$ $x \in \mathbb{R}$	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$	$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$	$\forall x \in]0, +\infty[, e^{\ln x} = x$
$e^{a+b} = e^a \times e^b$	$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	$(e^x)^r = e^{rx}$, $e^x \times e^x = e^{2x}$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\underbrace{e^x \times e^x \times \dots \times e^x}_n = (e^x)^n = e^{nx}$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times e^x = 0^-$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \times e^x = 0$; $n \in \mathbb{N}^*$		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$; $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	